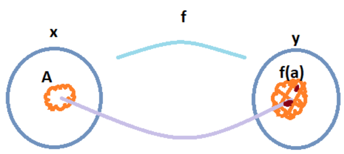
Resumen Semana 4

Equipo 19. Cálculo 3 - UNAM.

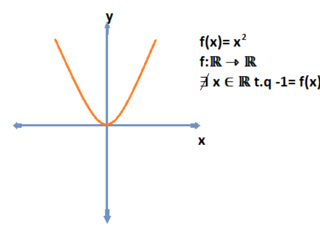
21 de agosto de 2020

I. Clase 16: 17/08/2020

Definición I.1. Sea $f : X \to Y$ una función y $A \subset X$, Definimos y denotamos la imagen de A por:
$f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para alguna } x \in A\}$



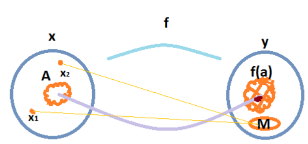
(a)



(b)

Figura 1: Imagen directa

Definición I.2. Sea $f : X \to Y$ una función y $M \subset Y$. Definimos y denotamos la imagen inversa de M por:
$f^{-1}(M) = \{x \in X : f(x) \in M\}$



inversa.png

Figura 2: Imagen Inversa.

Proposición I.1. *Sean $f : X \to Y$ una función y $A, B \subset X$. Entonces.*

1.- $A \subset B \to f(A) \subset f(B)$
Dem: $y \in f(A) \Rightarrow y = f(x)$ p.a. $x \in A$, además $A \subset B \Rightarrow x \in B \Rightarrow f(x) \in f(B)$

2.- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
$\Rightarrow f(A \cup B) \in f(A) \cup f(B)$
Sea $y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B$ t.q. $y = f(x)$
Si $x \in A \Rightarrow y = f(x) \in f(A) \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$.

$\Leftarrow$ Si $x \in B$.Análogamente al caso anterior $A \subset (A \cup B) \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$ Por prop. 1 y $f(B) \subset f(A \cup B) \Rightarrow f(A) \cup f(B) \subset$

3.- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
$A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$ Por prop. 1
$f(A \cap B) \subset f(A) y f(A \cap B) \subset f(B)$
$\Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Proposición I.2. *Sean* $f : X \to Y$ *donde* $M \subset Y, f^{-1}(M) = \{x \in X : f(x) \in M\}$

1.- $F \subset G \Rightarrow f^{-1}(F) \subset f^{-1}(G)$
Dem:$x \in f^{-1}(F) \Rightarrow f(x) \in F \subset G \Rightarrow f(x) \in G \Rightarrow x \in f^{-1}(G)$.

2.- $f^{-1}(F \cup G) = f^{-1}(F) \cup f^{-1}(G)$
Dem: $\Rightarrow x \in f^{-1}(F \cup G) \Rightarrow f(x) \in F \cup G \Rightarrow f(x) \in F \Rightarrow x \in f^{-1}(F) \Rightarrow x \in f^{-1}(F) \cup f^{-1}(G)$

$\Leftarrow f^{-1}(F) \cup f^{-1}(G) \subset f^{-1}(F \cup G)$
$F \subset F \cup G \Rightarrow f^{-1}(F) \subset f^{-1}(F \cup G)$ Por Prop.1 $\Rightarrow G \subset F \cup G \Rightarrow f^{-1}(G) \subset f^{-1}(F \cup G) \Rightarrow f^{-1}(F) \cup f^{-1}(G) \subset f^{-1}(F \cup G)$.

4.- $f^{-1}(F \setminus G) = f^{-1}(F) - f^{-1}(G)$
$\Rightarrow x \in f^{-1}(F \setminus G) \Rightarrow f(x) \in (F \setminus G) \Rightarrow f(x) \subset F$ y $f(x) \notin G \Rightarrow x \in f^{-1}(F)$ y $x \notin f^{-1}(G) \Rightarrow x \in f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(G)$

$\Leftarrow x \in f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(G) \Rightarrow x \in F^{-1}(F)$ y $x \notin f^{-1}(G) \Rightarrow f(x) \in F$ y $f(x) \notin (G) \Rightarrow f(x) \in F \setminus G \Rightarrow x \in f^{-1}$

II. Clase 17: 18/08/2020

Dudas.

Ejercicio 1. *2.- Calcular la ecuación parametrica de la recta que pasa por P(0,0,0) y es ortogonal a las rectas* L_1 *y* L_2 *cuyas ecuaciones parametricas están dadas por:*

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 1 + 7\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = -1 + 5\mu \end{cases}$$

$\Rightarrow L_1 : (x, y, z) = \lambda \overline{u} + p_1$
$L_2 : (x, y, z) = r\overline{v} + p_2 \Rightarrow L : (x, y, z) = t\overline{w} \Rightarrow \overline{w} = \overline{u} \times \overline{v}$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 1 + 7\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 + \mu \\ y = 1 + 2 + 4\mu \\ z = -1 + 5\mu \end{cases}$$

$(1, 4, 7) = \overline{u}$, $p_1 = (a, b, c) \Rightarrow (x, y, z) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + p$

$$\begin{cases} x = \lambda u_1 + a \\ y = \lambda u_2 + b \\ z = \lambda u_3 + c \end{cases}$$

$$L_2(1, 2, 5) = \overline{v} \Rightarrow \overline{w} = \overline{u} \times \overline{v} = (6, 2, -2) \Rightarrow L : (x, y, z) = t(6, 2, -2), t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = 6t \\ y = 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

Ejercicio 2. *15.- Demuestre que el limite indicado no existe.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x}y^2}{x+y^3}$$

Si evaluamos se indetermina entonces si $x = y \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{x}x^2}{x+x^3} = \frac{x^{2/3}}{x+x^3}$
Si $x = y^3 \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{y^3}y^2}{y^3+y^3} = \frac{y^3}{2y^3} = \frac{1}{2}$ Si $x = t^6$ y $y = -t \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{t^6}t^2}{t^6-t^3} = \frac{t^4}{t^6-t^3} = \frac{t^3}{t^3} = \frac{t}{t^3-1} \Rightarrow t \to 0 \Rightarrow 0$

Superficie de nivel

$f(x,y,z) = z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 - 1$ La gráfica vive en $\mathbb{R}^4$, no la podemos dibujar.
Superficie de nivel C. $(x,y,z)/z^2 + (\sqrt{x^2+y^2-2)^2 - 1} = C$
$C = -1$ $C = 0$ $C = 1 \Rightarrow$ Si $x = 0$ $(YZ) \Rightarrow \sqrt{y^2} = |y|$
$z^2 + (|y|-2)^2 - 1 = C$
$z^2 + (|y|-2)^2 = C + 1 > 0$
Si $y = 0$ $(XZ) \Rightarrow z^2 + (x-2)^2 = C + 1$
Si $z = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2-2)^2} = C + 1$
$x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2+y^2+4} = C + 1$

III. Clase 18: 19/08/2020

(a) $(\cup_{\alpha\in I} A_\alpha) \cap B = \cup_{\alpha\in I}(A_\alpha \cap B)$

$\Rightarrow x \in (\cup_{\alpha\in I} A_\alpha) \cap B$
P.D. $x \in \cup_{\alpha\in I}(A_\alpha \cap B)$
$x \in \cup_{\alpha\in I} A_\alpha$ y $x \in B \Rightarrow x \in A_{\alpha 0}$ para algún, $\alpha_0 \in I \Rightarrow x \in A_{\alpha 0} \cup B \Rightarrow \cap_{\alpha\in I}(\cup_{\alpha\in I}(A_\alpha \cap B)$.
$\Leftarrow x \in \cup_{\alpha\in I}(A_\alpha \cap B) \Rightarrow \exists \alpha_0 \in I$ t.q. $x \in A_{\alpha 0} \cap B \Rightarrow x \in A_{\alpha 0}$ y $x \in B \Rightarrow x \in \cup_{\alpha\in I}$ y $x \in (\cup_{\alpha\in I} A_\alpha) \cap B$

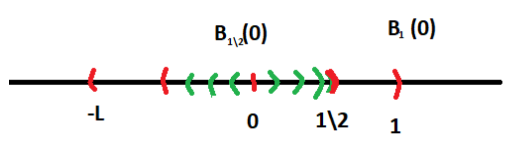
$F = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$

(a) $(\cup_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \cap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$

(b) $(\cap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$

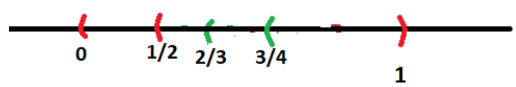
Demostración.
$\Rightarrow x \in (\cap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c \Rightarrow x \notin A_\alpha \forall \alpha \in I \Rightarrow$ Para cada $\alpha \in I, x \in A_\alpha^c \Rightarrow x \in \cup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$
$\Leftarrow x \in \cap_{\alpha\in I} A_\alpha^c \Rightarrow x \in A_\alpha^c \forall \alpha \in I \Rightarrow \notin A_\alpha \forall \alpha \in I \Rightarrow x \notin \cup_{\alpha\in I} A_\alpha \Rightarrow x \in (\cap_{\alpha\in I} A_\alpha)^c$

5.- Demuestre que $\cap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{K}}(0) = \{0\}$



$\cap_{k\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \{0\}$ si $\cap(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \neq \{0\} \Rightarrow \exists \epsilon > 0$ t.q. $0 < \epsilon < \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N}$
$k < \frac{1}{\epsilon} \forall k \in \mathbb{N}!$
$\mathbb{N}$ no están acotados superiormente.

9.- Sea A= $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ Demuestra que A tiene solo un punto de acumulación. ¿Quien es la adherencia de A? y $F_r(A)$ y A°



$B_r(\frac{2}{3})|\frac{2}{3}) \cap A = \emptyset$

Af. $\forall$ $(B_\epsilon(1)|\{1\}) \cap A \neq \emptyset$
Sup. por el contrario que $\exists \epsilon > 0$ t.q. $(B_\epsilon(1)|\{1\}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1-\epsilon \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n \leq (n+1)(1-\epsilon) \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n \leq n - n\epsilon + 1 - \epsilon \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \forall n \in \mathbb{N}!$

Composición de funciones continuas.

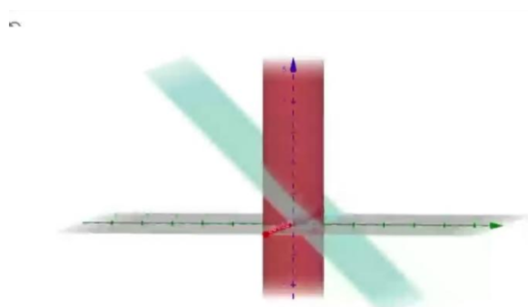
Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ donde U es abierto en $\mathbb{R}^n$ y V es abierto en $\mathbb{R}^m$
Si f es continua en $x_0 \in U$ entonces la función compuesta $g \circ f : U \subset \mathbb{R}^p$ es continua en x_0
Demostración.
Dado $\epsilon > 0$, por ser g continua en $f(x_0)$, existen $n > 0$ tal que. $\|y - f(x_0)\| < n \Rightarrow \|g(y) - g(f(x)\| < \epsilon$
Como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que
$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f()x_0\| < n$
De ambas aplicaciones concluimos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|g(f(x_0))\| < \epsilon$
Por lo tanto $g \circ f$ es continua en x_0

IV. Clase 19: 20/08/2020

Dudas.

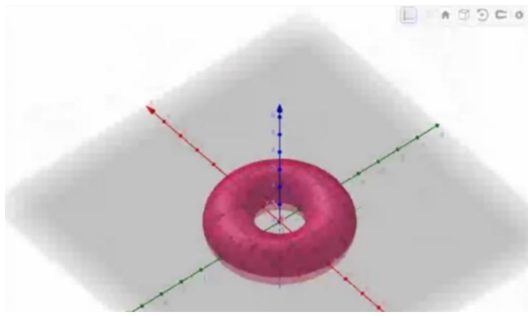
f es una parametrizacion de una curva. $(\cos t, \sin t, 1-\sin t) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 - \sin t \end{cases}$ Ecuación parametrica.
Sabemos $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow z = 1 - y \Rightarrow 0x + y + z - 1 = 0 \Rightarrow (0,1,1) = \overline{n}$

Ecuación de la Recta.
$(x, y, z) = t\overline{u} + \overline{v}, t \in \mathbb{R}$
Param. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow \gamma(t) = t\overline{u} + \overline{v} \Rightarrow t \to t\overline{u} + \overline{v}$



$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Función escalar
$f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 - 1$
Encontrar la superficie de nivel para $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1 \Rightarrow z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 - 1 = -1$

$\Rightarrow z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2=0$ Superficie en $\mathbb{R}^3$ trazar $x=0$ plano (YZ) $\Rightarrow z^2+(|y|-2)^2=1 \Rightarrow \sqrt{y^2}=|y| \Rightarrow y=2$ o $y=-2 \Rightarrow$ Sol.$\{0,2,0\},\{0,-2,0\}$ Con $y=0$ plano (ZX) $z^2+(|x|-2)^2=1$ circulo de radio 0 $\Rightarrow$ Sol {(2,0,0), (-2,0,0)}
$z=0$ Plano (XY) $\Rightarrow (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2=0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}-2=0 \Rightarrow x^2+y^2=4 \Rightarrow (\sqrt{x^2+y^2}-2)=1 \Rightarrow x^2+y^2=9$
$\Rightarrow$ Circulo con radio 3
$z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2-1 \Rightarrow z^2=-(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+1 \Rightarrow z=\pm\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}$ Si (x,y) cumple $1-(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2$ Frontera $\Rightarrow 1=\sqrt{x^2+y^2}-2 \Rightarrow 3^2=x^2+y^2$ Es un circulo de radio 3



$$\left\{\begin{array}{r} x=-1+2\lambda+3\mu \\ y=4\lambda-\mu \\ z=2-3\lambda+2\mu \end{array}\right. \Rightarrow 2x-5y+z=0 : \pi_2$$

$\pi:(x,y,z)=t\overline{u}+s\overline{v}+P$
$\overline{u}\times\overline{v}=\overline{n}=\Pi\cap\Pi$
$<(x,y,z)-P,\overline{n}>=0$ Ecuación del plano
$\Rightarrow \Pi_1=\lambda\overline{\alpha}+\mu\overline{\beta}+\overline{\gamma}=(x,y,z) \Rightarrow \lambda(2,4,-3)+\mu(3,\frac{-1}{\beta},2)+(-1,0,2) \Rightarrow \overline{\alpha}\times\overline{\beta}=\overline{n_1}$
$\Rightarrow \Pi_1 :< \overline{x}-\overline{\Gamma},\overline{n_1}=0$ Ecuación cartesiana.