Tarea Cálculo 3: Límites

Equipo 19

August 2020

Calcular el límite

5

$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{x^2y}{4x^2-y} \Rightarrow \frac{1^2(3)}{4(1)^2-3} = \frac{1(3)}{4-3} = \frac{3}{1} = 3$

7

$\lim_{(x,y)\to(\pi,1)} \frac{cos(xy)}{y^2+1} \Rightarrow \frac{\cos[(\pi)(1)]}{1^2+1} = \frac{\cos(\pi)}{1+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

Demostrar que el límite no existe

9

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{3(0)^2}{(0)^2+(0)^2} = \frac{0}{0}$, llegamos a una indeterminación.
Hacemos $x = 0 \Rightarrow \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{3(0)^2}{0^2+y^2} = 0$
Haciendo $x = y \Rightarrow \lim_{(y,y)\to(y,0)} \frac{3y^2}{y^2+y^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ El limite no existe.

11

11.- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy}{3y^2-x^2}$

sea $x=0$ $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{3y^2} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

sea $y=x$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{3x^2-x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(4)x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$

$\therefore$ hay dos caminos que dan resultados diferentes

$\therefore$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy}{3y^2-x^2}$ no existe.

13

13.- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4+y^2}$

sea $x=0$ $\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

sea $y=x^2$ $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

$\therefore$ hay dos caminos que dan resultados diferentes

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4+y^2}$ no existe.

15

15.- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x}\, y^2}{x+y^3}$

sea $x=0$ $\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^3} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

sea $x=y^3$ $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{y^3}\, y^2}{y^3+y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{2y^3} = \frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x}\, y^2}{x+y^2}$ no existe.

17

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin x}{x^2+y^2}$$

Camino 1: $x = x_0 = 0$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y\sin 0}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Camino 2: $x = y$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x\sin x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Entonces el límite no existe

19

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2-2x+y^2-4y+5}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2-2x+y^2-4y+5} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x(y-2)-(y-2))}{x^2-2x+1+y^2-4y+4} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

Haciendo el cambio de coordenadas $x' = x-1$, $y' = y-2$, entonces $(1,2)\to(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{x'y'}{x'^2+y'^2}$$

Camino 1: $x' = 0$

$$\lim_{(0,y')\to(0,0)} \frac{(0)y'}{0+y'^2} = \lim_{(0,y')\to(0,0)} 0 = 0$$

Camino 2: $x' = y'$

$$\lim_{(x',x')\to(0,0)} \frac{x'^2}{x'^2+x'^2} = \lim_{x'\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Entonces el límite no existe

21

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Camino 1: $x = x_0 = 0$

$$\lim_{(0,y,z)\to(0,0,0)} \frac{0}{0+y^2+z^2} = \lim_{(y,z)\to(0,0)} 0 = 0$$

Camino 2: $x = y = z$

$$\lim_{(x,x,x)\to(0,0,0)} \frac{3x^2}{x^2+x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Entonces el límite no existe

23

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$$

Camino 1: $x = x_0 = 0$

$$\lim_{(0,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(0)yz}{(0)^3+y^3+z^3} = \lim_{(y,z)\to(0,0)} 0 = 0$$

Camino 2: $x = y = z$

$$\lim_{(x,x,x)\to(0,0,0)} \frac{x^3}{x^3+x^3+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Entonces el límite no existe

Demostrar que el límite existe

25

25. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ Observando su gráfica comprobamos que el límite debe ser 0.

Pd. $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0$ t.q. $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ entonces $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

Observa $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

Como $0<x^2\le x^2+y^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{1}{x^2}$

Así $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{xy^2}{y^2}\right| = |x| < \varepsilon$

Como $|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$ tomamos $\delta=\varepsilon$.

y entonces si $\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon \Rightarrow |x|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

27

29

27. Lim

$(x,y) \to (0$

T

Proponem

Queremos

(29) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+4x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$ Consideremos diferentes trayectoria

1. $x=0$: $\displaystyle\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0^3+4 0^2+2y^2}{2(0)^2+y^2} (\dots)$

$$= \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{2y^2}{y^2} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} 2 = 2$$

2. Sea $y=0$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+4x^2+2(0)}{2x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+4x^2}{2x^2} (\dots)$

$$\frac{(x^2)(x+4)}{(x^2)2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}(x+4) = \lim_{x\to 0} 2 = 2$$

Entonces el límite propuesto es 2.

Queremos demostrar que $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$ t. si $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ entonces $\left|\frac{x^3+4x^2+2y^2}{2x^2+y^2}-2\right|<\varepsilon$

Veáse que $\displaystyle\frac{x^3+4x^2+2y^2}{2x^2+y^2}-2 = \frac{x^3+\cancel{4x^2}+\cancel{2y^2}-\cancel{4x^2}-\cancel{2y^2}}{2x^2+y^2} = \frac{x^3}{2x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \left|\frac{x^3+4x^2+2y^2}{2x^2+y^2}-2\right| = \left|\frac{x^3}{2x^2+y^2}\right| < \varepsilon$$

Como $0<x^2<x^2+y^2<2x^2+y^2$

Entonces $\displaystyle\frac{1}{2x^2+y^2} < \frac{1}{x^2+y^2} < \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{2x^2+y^2} < \frac{x^3}{x^2} \Rightarrow \left|\frac{x^3}{2x^2+y^2}\right| < \left|\frac{x^3}{x^2}\right| = \frac{|x^3|}{|x^2|} = \frac{|x|^3}{|x|^2} = |x|$$

y recordemos que $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

Si $\delta=\varepsilon$ entonces $\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon \Rightarrow |x|<\varepsilon$

y por lo tanto $\left|\frac{x^3}{2x^2+y^2}\right|<\varepsilon$