Tarea Cálculo 3

Equipo 19

August 2020

Problema 1

Calcula la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y la forma cartesiana del plano π que pasa por los puntos $P(2,-1,4)$, $Q(1,2,3)$ y $R(-2,0,5)$.
$\overline{QP} = P(2,-1,4) - Q(1,2,3) = (1,-3,1)$
$\overline{QR} = R(-2,0,5) - P(1,2,3) = (-3,-2,2)$

- Ecuación Vectorial.

Donde $\bar{u} = (1,-3,1)$, $\bar{v} = (-3,-2,2)$ y $x_0, y_0, z_0 = (1,2,3)$

$\therefore (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,-3,1) + \mu(-3,-2,2)$

- Ecuaciones Parametricas.

Tenemos que $(x,y,z) = (x_0 + u_1\lambda + v_1\mu, y_0 + u_2\lambda + v_2\mu, z_0 + u_3\lambda + v_3\mu)$
Donde $\bar{u} = (1,-3,1)$, $\bar{v} = (-3,-2,2)$ y $x_0, y_0, z_0 = (1,2,3)$

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_0 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_0 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}$$

$\Rightarrow (x,y,z) = (1+1\lambda) + (-3)\mu), (2-3\lambda+(-2)\mu), (3+1\lambda+2\mu) = (1+\lambda-3\mu), (2-3\lambda-2\mu), (3+\lambda+2\mu)$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 + \lambda - 3\mu \\ y = 2 - 3\lambda - 2\mu \\ z = 3 + \lambda + 2\mu \end{cases}$$

- Ecuación Cartesiana.

$\overline{QP} = P(2,-1,4) - Q(1,2,3) = (1,-3,1)$
$\overline{QR} = R(-2,0,5) - P(1,2,3) = (-3,-2,2)$
Hacemos el producto punto entre los vectores $\overline{QP} \times \overline{QR}$

$$\overline{QP}\times\overline{QR}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = [-3(2)-(-2)(1)]\hat{i}-[1(2)-(-3)(1)]\hat{j}+[1(-2)-(-3)(-3)]\hat{k} = (-6+2)\hat{i}-(2+3)\hat{j}+(-2-9)\hat{k} = -4\hat{i}-5\hat{j}-11\hat{k}=\hat{n}$$

$T(x,y,z) \Rightarrow \overline{QT} = T(x,y,z) - P(1,2,3) = x-1, y-2, z-3$
$\overline{QT}\cdot\overline{n} = 0$
$\Rightarrow (x-1, y-2, z-3)\cdot(-4,-5,-11) = 0$
$\Rightarrow (x-1)-4+(y-2)-5+(z-3)-11 = 0 \Rightarrow -4x+4-5y+10-11z+33 = 0$
$\Rightarrow -4x-5y-11z+47 = 0$
$\Rightarrow -4x-5y-11z = -47$
$\therefore\ 4x+5y+11z = 47$

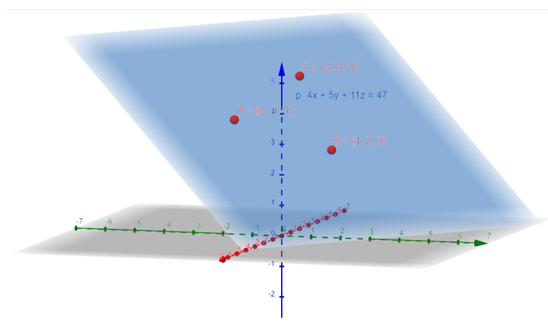


Figura 1: Grafica del plano que pasa por los tres puntos P,Q y R.

Problema 2

Calcular la ecuación paramétrica de la recta que pasa por P(0,0,0) y es ortogonal a las rectas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por:

$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2+4\lambda \\ z = 1+7\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4+\mu \\ y = 1+2\mu \\ z = -1+5\mu \end{cases}$$

Obtenemos a partir de las ecuaciones paramétricas dos vectores de dirección $\overline{b_1}$ y $\overline{b_2}$.

$\overline{b_1} = (1,4,7)$ y $\overline{b_2} = (1,2,5)$, siendo $P_0 = (0,0,0)$. Utilizando la propiedad, en donde si $a \perp b \Leftrightarrow \overline{a}\cdot\overline{b} = 0$. Sea $\overline{n} = (a,b,c)$ el vector dirección de la recta que deseamos descubrir.

Realizamos el producto punto entre $\overline{n}\cdot\overline{b_1} = 0 \Rightarrow (a,b,c)\cdot(1,4,7) = 0 \Rightarrow a+4b+7c = 0$

Ahora realizamos el producto punto entre $\overline{n} \cdot \overline{b_2} = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (1, 2, 5) = 0$
$\Rightarrow a + 2b + 5c = 0$

Restamos ambos resultados obtenidos al realizar el producto punto, para de esta forma eliminar a. $\Rightarrow 2b + 2c = 0 \Rightarrow 2b = -2c \Rightarrow b = -c$

Ahora sustituimos $b = -c \Rightarrow a + (-4c) + 7c = 0 \Rightarrow a + 3c = 0 \Rightarrow a = -3c$
$\Rightarrow \overline{n} = (-3c, -c, c) = c(-3, -1, 1)$

$$\Rightarrow L = \{(0, 0, 0) + \lambda(-3, -1, 1)\}$$

Por lo que la ecuación parametrica de la recta esta dada por:
$(x, y, z) = (0, 0, 0) + (-3\lambda, -\lambda, \lambda)$

$$\therefore \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

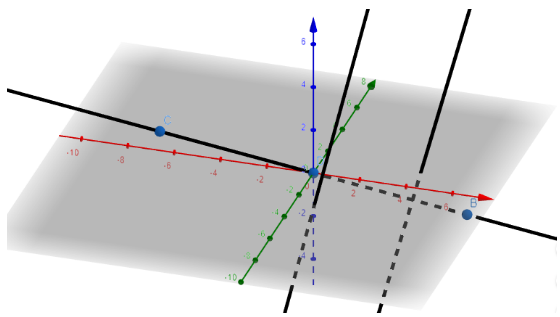


Figura 2: Gráfica de la recta que pasa por el punto $P(0, 0, 0)$ y además es ortogonal a las rectas L_1 y L_2.

Problema 3

Calcular la ecuación cartesiana del plano que pasa por $P(1, -1, 4)$ y es paralelo a las rectas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones están dadas por

$$\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 7 + 4\lambda \end{cases} \qquad \frac{x-6}{5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{6}$$

De las ecuaciones paramétrica y obtenemos dos vectores. $\overline{u} = (3, 1, 4)$ y $\overline{v} = (5, 2, 6)$
Como el vector de interés es paralelo a las rectas L_1 y L_2, su vector normal $\overline{n}$ es perpendicular al vector director $\overline{v}$ de la recta, esto se muestra en la figura 3.

Entonces aplicamos el producto escalar
$\overline{n} \cdot \overline{v} = (a, b, c) \cdot (5, 2, 6) = 5a + 2b + 6c = 0$
y continuamos con el producto escalar

$\overline{n} \cdot \overline{u} = (a, b, c) \cdot (3, 1, 4) = 3a + b + 4c = 0.$
Restamos ambas ecuaciones obtenidas de modo que obtenemos:
$2a+b+2c = 0 \Rightarrow b = -2c-2a$. Ahora sustituimos b en $5a+2(-2c-2a)+6c = 0$ a lo que obtenemos $a + 2c = 0 \Rightarrow a = -2c$
Dado que $b = -2c - 2a$. y $a = -2c$, entonces sustituimos $b = -2c - 2(-2c) \Rightarrow b = 2c$
$\Rightarrow \overline{n} = (-2c, 2c, c) = c(-2, 2, 1)$

Ahora calculamos la ecuación cartesiana del plano que viene dada por:
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ Sustituimos los valores utilizando el punto $P(1, -1, 4) \Rightarrow -2(x-1)+2(y-(-1)+1(z-4) = 0 \Rightarrow -2x+2+2y+2+z-4 = 0$
$\Rightarrow -2x + 2y + z = -2 - 2 + 4$
$\Rightarrow -2x + 2y + z = 0$
$\therefore -2x + 2y + z = 0$

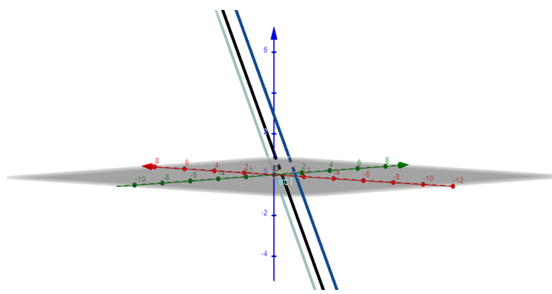


Figura 3: Gráfica del plano que pasa por el puntos P(1,-1,4) y además es paralelo a las rectas L_1 y L_2.

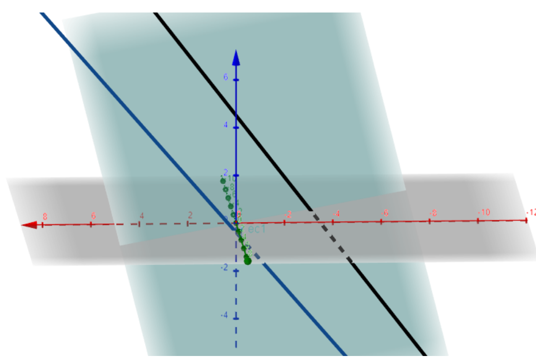


Figura 4: Gráfica del plano que pasa por el puntos P(1,-1,4) y además es paralelo a las rectas L_1 y L_2.

Problema 4

Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2,6,-1)$ y es ortogonal a la recta de intersección de los planos.

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 4\lambda - \mu \\ z = 2 - 3\lambda + 2\mu \end{cases} \qquad y \quad 2x - 5y + z = 0$$

Considerando la primera ecuación, podemos saber que los puntos que estén contenidos en el plano que describe van a ser de la forma $(x, y, z) = (-1, 0, 2) + \lambda(2, 4, -3) + \mu(3, -1, 2)$. Esta sería la ecuación vectorial del plano.
Ahora, de esa ecuación tenemos que $(x + 1, y, z - 2) = \lambda(2, 4, -3) + \mu(3, -1, 2)$.
Y como estamos en $\mathbb{R}^3$, se tiene que para tres vectores, uno combinación lineal de los otros dos, el determinante de los tres debe se cero. Así $\begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.
$\therefore (x + 1)(8 - 3) - y(4 + 9) + (z - 2)(-2 - 12) = 0$
$\Rightarrow (x + 1)(5) - y(13) + (z - 2)(-14) = 0$
$\Rightarrow 5x + 5 - 13y - 14z + 28 = 0$
$\Rightarrow 5x - 13y - 14z = -33.$
Entonces ahora tenemos dos planos con su ecuación en formal general (cartesiana)

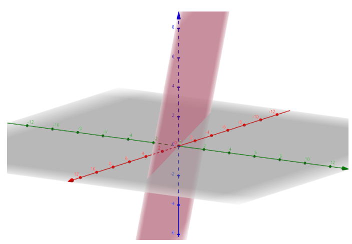


Figura 5: $2x - 5y + z = 0$

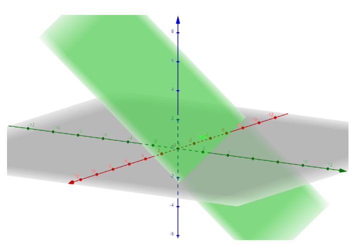
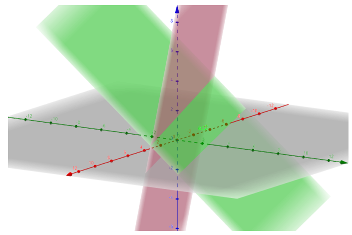


Figura 6: $5x - 13y - 14z = -33$

Si esos planos se intersectan deben generar una recta



Poniendo ambos en un sistema de ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ 5x - 13y - 14z = -33 \end{cases}$$

y aplicando el método de Gauss-Jordan tenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & -13 & -14 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -33 & -66 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 166 & 330 \\ 0 & -1 & -33 & -66 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 83 & 165 \\ 0 & -1 & -33 & -66 \end{array}\right)$$

$\therefore \begin{cases} x + 83z = 165 \\ -y - 33z = -66 \end{cases}$ Entonces hay infinitas soluciones para el sistema, así

$$\begin{cases} x = 165 - 83t \\ y = -33t + 66 \qquad , t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

que es la ecuación paramétrica de una recta en $\mathbb{R}^3$ y vista en forma de ecuación vectorial es $(x, y, z) = (165, 66, 0) + t(-83, -33, 1)$

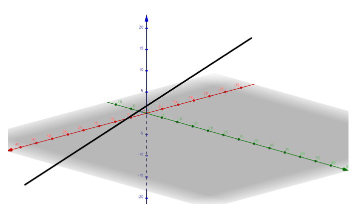


Figura 7: $(x, y, z) = (165, 66, 0) + t(-83, -33, 1)$

Por lo tanto el vector director de la recta generada por la intersección de los planos es $\vec{v} = (-83, -33, 1)$.
Ahora ya tenemos un punto que está en el plano que buscamos ($P(2, -6, 1)$) y un vector que es ortogonal ($\vec{v} = (-83, -33, 1)$), solo resta encontrar dicho plano, llamémoslo π.
Con la información del vector normal sabemos que el plano va a ser de la forma

$\pi : -83x - 33y + z + D = 0$.
Sabemos también que el plano pasa por el punto P entonces sustituyéndolo en la ecuación anterior, se debe mantener la igualdad y así encontraremos el valor D.
$-83(2) - 33(6) - 1 + D = 0 \Rightarrow -365 = -D \Rightarrow D = 365$
$\therefore -83x - 33y + z + 365 = 0$ es la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, 6, -1)$ y es ortogonal a la recta de intersección de los planos iniciales.

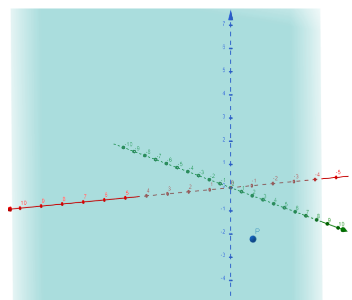


Figura 8: $-83x - 33y + z + 365 = 0$

Problema 5

Demuestra que $\cap_{k=1}^{\infty} B_{1/k}(0) = \{0\}$.

Para demostrar acerca de una intersección infinita, calculamos el límite de la intersección finita al infinito.

$$\cap_{k=1}^{\infty} B_{1/k}(0) = \lim_{n\to\infty} \cap_{k=1}^{n} B_{1/k}(0) = \lim_{n\to\infty} B_{1/n}(0) = B_0(0) = \{0\}$$

pues $B_1(0) \supset B_{1/k}(0) \supset B_{1/(k+1)}(0) \supset B_{1/n}(0) \supset B_0(0) = \{0\}$

Problema 6

Demuestra que:
a) La frontera de toda bola abierta es la esfera con el mismo radio y centro.
Dem. La bola abierta de de centro x y radio r es el conjunto
B(x, r)=$\{y \in X : d(x, y) < r\}$.
La frontera es el conjunto Fr(B(x, r))=$\{z \in X : z \in \overline{B} - B^{\circ}\}$=
$\{z \in X : z \in \overline{B}\ \ \&\ \ z \notin B^{\circ}\} = \{z \in X : d(x, z) \leq r\} \cap \{z \in X : d(x, z) \geq r\} =$
$\{z \in X : d(x, z) = r\}$.
Y sabemos que la definición de esfera con centro en x y radio r es el conjunto S(x, r)=$\{a \in X : d(a, y) = r\}$, que es exactamente lo que obtuvimos de la Fr(B(x, r)).
b)La frontera de una esfera es ella misma.

Dem: La esfera por definición es S(x, r)=$\{y \in X : d(x, y) = r\}$. Dado que la Fr(S)=$\{y \in X : y \in \overline{S} - S^\circ\}$=$\{y \in X : y \in \overline{S} \ \ \& \ \ y \notin S^\circ\}$ y por la definición de esfera (S(x,r))$^\circ$= $\emptyset$. Por lo tanto, Fr(S(x,r))=$\{y \in X : y \in \overline{S}\}$=$\{y \in X : d(x, y) = r\}$

c)Demuestra que un punto es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Dem: Sea p un punto $p \in R^n$ queremos comprobar que $R^n \backslash p$ es abierto. Un conjunto es abierto si dado $x \in R^n \backslash p$ $\exists$ una bola abierta $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n \backslash p$, y es claro que existe esta bola que cabe en todo $\mathbb{R}^n \backslash p$, y no es necesario centrar la bola en p, y toda bola no centrada en p está en el conjunto.

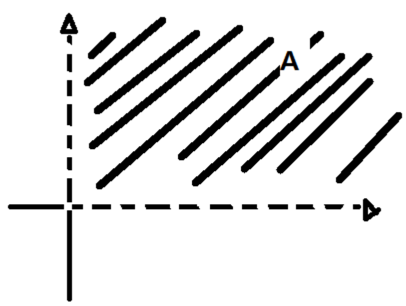
d) El conjunto [1, ∞) es un subconjunto cerrado en R.

Para demostrarlo vemos que su complemento es abierto A=(-∞, 1).

Como todo intervalo abierto es un abierto, ya terminamos.

e)El conjunto dado por $A = (0, \infty) \times (0, \infty)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Dibújalo.

El producto cartesiano de abiertos es un abierto, por lo que A es un abierto.



Problema 7

a) ¿Cuál es la frontera del conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}^2$

P.d. $Fr(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2$

Dem: $Fr(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}^2$ pues es subconjunto

P.d. $Fr(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \supseteq \mathbb{R}^2$

Dem: Sean $r > 0$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, nos situamos en $B_r(x_0, y_0)$. Si sobre el eje x nos desplazamos a la derecha una cantidad $r/2$, entonces existe $\overline{p} \in \mathbb{Q}$ tal que $\overline{p} \in (x_0, x_0 + r/2)$. De forma similar si nos desplazamos en y entonces existe $\overline{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $\overline{q} \in (y_0, y_0 + r/2)$. Entonces como

$x_0 < \overline{p} < x_0 + r/2 \implies |\overline{p} - x_0| < |x_0 + r/2 - x_0| = r/2$, y de forma similar

$y_0 < \overline{q} < y_0 + r/2 \implies |\overline{q} - y_0| < |y_0 + r/2 - y_0| = r/2$, se cumple que

$||(\overline{p}, \overline{q}) - (x_0, y_0)|| \leq |\overline{p} - x_0| + |\overline{q} - x_0| < r \implies (\overline{p}, \overline{q}) \in B_r(x_0, y_0)$, y como

$(\overline{p}, \overline{q}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \implies B_r(x_0, y_0) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

También $\exists \overline{p}' \in \mathbb{Q}^c$, tal que $\overline{p}' \in (x_0, x_0 + r/2)$, y $\exists \overline{q}' \in \mathbb{Q}^c$, tal que

$\overline{q}' \in (y_0, y_0 + r/2)$, lo cual implica que $||(\overline{p}', \overline{q}') - (x_0, y_0)|| \leq |\overline{p}' - x_0| + |\overline{q}' - x_0| < r$

$\implies (\overline{p}', \overline{q}') \in B_r(x_0, y_0)$ y como $(\overline{p}', \overline{q}') \in \mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c$

$\implies B_r(x_0, y_0) \cap (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) \neq \emptyset$. En consecuencia

$(x_0, y_0) \in Fr(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \implies \mathbb{R}^2 \subseteq Fr(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$

$\therefore Fr(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2$.

b) ¿Quien es el complemento de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}^2$. Y ¿quien es Fr($\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$)?

Por definición del complemento de un producto cartesiano, sea $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^c = (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \bigcup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$

Como $Fr(A) = Fr(A^c)$, $Fr((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^c) = Fr(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2$

Problema 8

Demuestra que $\overline{A} = A^\circ \cup Fr(A)$

Debemos probar la doble contención. Queremos demostrar que si $x \in \overline{A} \to x \in A^\circ \cup Fr(A) \to x \in A^\circ$ ó $x \in Fr(A)$.

Tenemos dos casos, que $x \in A^\circ \subset \overline{A} \to x \in A^\circ \cup Fr(A)$. Y en el caso 2 $x \notin A^\circ \subset \overline{A} \to x \in \overline{A}$ y $x \notin A^\circ \to x \in \overline{A} - A^\circ = Fr(A) \to x \in Fr(A) \cup A^\circ$.

$\therefore \overline{A} \subseteq A^\circ \cup Fr(A)$

Ahora el regreso si $x \in A^\circ \cup Fr(A)$, podemos elegir indistintamente A° o $Fr(A)$, por conveniencia tomamos A° por sus propiedades $x \in A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ y se demuestra. Ahora si tomamos un punto en la frontera que por definición es Fr(A)=$\{y \in X : y \in A \cap (A^\circ)^C\}$ y entonces $x \in A \subset \overline{A}$ y se cumple lo que deseamos. $\therefore \overline{A} \supseteq A^\circ \cup Fr(A)$

$\therefore \overline{A} = A^\circ \cup Fr(A)$

Problema 9

Sea $A = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que A sólo tiene un punto de acumulación. ¿Quién es la adherencia de A? Y ¿$Fr(A)$ y A°?

Para cada n el entorno de $\frac{n}{n+1}$ de radio r contiene elementos que no son en A, pues para algún $r_k \in \mathbb{R} \leq r$, $\frac{n}{n+1} + r_k \neq \frac{m}{m+1}, m \in \mathbb{N}$, ya que, por ejemplo, la suma de un irracional más un racional da un irracional. Y para $n \to \infty$, todo entorno de radio ϵ contiene al menos un elemento de A, pues como el $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, esto es para todo $\epsilon > 0$ existe una c tal que $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon$, siempre que $n > c$, entonces $\frac{n}{n+1}$ está en la bola de radio ϵ y con centro en 1. En consecuencia $A^d = \{x \in \mathbb{R} : \forall r(B_r(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\} = \{1\}$

Vemos que todo elemento de A admite toda bola de radio r con centro en $x = \frac{n}{n+1} \in A$, entonces el centro pertenece a A y toda bola de radio r, por lo que $A \cap B_r(x) \neq \emptyset$. Por otra parte como $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, entonces para toda ϵ existe una c tal que $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon$, siempre que $n > c$, es decir, $B_\epsilon(1) \supset \{\frac{n}{n+1} : n > c\}$, por lo que $B_\epsilon(1) \cap A \neq \emptyset$, entonces $\bar{A} = A \cup \{1\}$.

Como $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, calculamos entonces $\overline{A^c}$. Como
$\overline{A^c} = \{x \in \mathbb{R} : \forall r B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset\}$, entonces, observamos que todos los puntos que no pertenecen a A, es decir, A^c, pertenecen a la cerradura $\overline{A^c}$, pues cada bola abierta $B_r(y)$ alrededor de cada uno de estos puntos $y \in A^c$ está contenida en A^c, por lo que $B_r(y) \cap A^c \neq \emptyset$, por otra parte, los puntos que pertenecen a A pertenecen a la cerradura $\overline{A^c}$, pues para todos los puntos en A, con $a \in A$, $B_r(a) \cap A^c \neq \emptyset$, ya que las bolas centradas en estos puntos contienen puntos de A^c, entonces $\overline{A^c} = A \cup A^c = \mathbb{R}$. En consecuencia $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap \mathbb{R} = \overline{A}$.

Como $Fr(A) = \overline{A} - A^\circ$ y $Fr(A) = \overline{A}$, entonces $\overline{A} = \overline{A} - A^\circ$, y entonces $A^\circ = \emptyset$

Problema 10

Demuestra que $\overline{A} = A \cup A^a$
Dem:
P.d. $\overline{A} \subseteq A \cup A^a$.
Sea $x \in \overline{A}$, esto implica dos casos:
1) si $x \in A^a \implies x \in A \cup A^a$.
2) si $x \notin A^a \implies x \notin A^a \ \& \ x \in \overline{A}$
$\implies (\forall r : B_r^\circ(x) \cap A = \emptyset) \ \& \ (\forall r : B_r(x) \cap A \neq \emptyset)$
$\implies \{x\} \cap A \neq \emptyset \implies x \in A \implies x \in A \cup A^a$
$\therefore \overline{A} \subseteq A \cup A^a$
P.d. $A \cup A^a \subseteq \overline{A}$.
Sea $x \in A \cup A^a \implies x \in A$ ó $x \in A^a$.
Si $x \in A \implies x \in \overline{A}$, pues $A \subset \overline{A}$
Si $x \in A^a \implies x \in \overline{A}$, pues $A^a \subset \overline{A} \therefore A \cup A^a \subseteq \overline{A}$
Finalmente, entonces, $\overline{A} = A \cup A^a$

Problema 11

Demuestre que si $f : R^n \to R^m$ es una función continua, entonces la imagen inversa de abiertos en R^m es abierta en R^n. Lo mismo con cerrados.
Dem: Sea $V \subset R^m$ un conjunto abierto y $x \in f^{-1}(V)$
ent. $f(x) \in V$ y como V es abierto existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{\epsilon_x}(f(x)) \subset V$.
f es continua en x (pues lo es en R^n)
así existe $\delta_x > 0$ tal que $B_{\delta_x}(x) \cap R^n \subset f^{-1}(B_{\epsilon_x}(f(x))$
haciendo esto para cada $x \in f^{-1}(V)$
tenemos que $(\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} B_{\delta_x}(x)) \cap R^n = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} (B_{\delta_x}(x) \cap R^n) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} f^{-1}(B_{\epsilon_x}(f(x)))$
$\subset f^{-1}(V) \subset (\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} B_{\delta_x}(x)) \cap R^n$ i.e. $f^{-1}(V) = (\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} B_{\delta_x}(x)) \cap R^n$
sea $U = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} B_{\delta_x}(x)$, observemos que U es un conjunto abierto ya que es el resultado de la unión de abiertos
ent. $f^{-1}(V)$ es la intersección de R^n y un abierto
por lo tanto $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto.
Supongamos que $V \subset R^m$ es un conjunto cerrado
se tiene que V^c es un conjunto abierto, por lo tanto
$f^{-1}(V^c) = f^{-1}(R^m - V) = R^n \cap (R^n - f^{-1}(V)) = R^n - f^{-1}(V)$
así si $x \in R^n$ entonces $x \in f^{-1}(V^c) \Rightarrow x \in f^{-1}(R^m - V) \Rightarrow f(x) \in R^m - V$
$\Rightarrow f(x) \notin V \Rightarrow x \notin f^{-1}(V) \Rightarrow x \in R^n - f^{-1}(V)$
como $f^{-1}(V^c)$ es un abierto en A, $f^{-1}(V^c) = F \cap R^n$ para algún abierto $F \subset R^n$
$f^{-1}(V) = R^n - (R^n - f^{-1}(V)) = R^n - f^{-1}(V^c) = R^n - (R^n \cap F) = R^n \cap (R^n - F)$
como F es abierto F^c es cerrado y entonces $f^{-1}(V) = R^n \cap F^c$ es un cerrado.

Problema 12

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua, demuestra que para toda $y \in \mathbb{R}^m$, $\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) = y\}$ es cerrado.

$\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) = y\} = f^{-1}(\mathbb{R}^m)$, como la pre-imagen de un cerrado es cerrado, y como el conjunto $\mathbb{R}^m$ es cerrado, entonces
$\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) = y\}$ es cerrado

Problema 13

Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dos funciones continuas. Demuestre que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\} &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = y, \ \& \ \ g(x) = y\}, \text{para } y \in \mathbb{R}^m \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = y\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = y\}\end{aligned}$$

Como la intersección de cerrados es conjunto cerrado, y como se demostró en el ejercicio 12 que ambos conjuntos de la intersección mostrada son cerrados, entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

Problema 14

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - 1$. Dibuja las superficies de nivel -1, 0 y 1. Incluye las trazas de dichas superficies obtenidas con los planos paralelos a XY, XZ, YZ.
La superficie de nivel c es la superficie $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - 1 = c$ entonces si queremos graficar la superficie de nivel -1, lo que debemos graficar es $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - 1 = -1$ que es equivalente a $z^2 + (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 0$. La superficie resultante es un toroide con distancia del centro del circulo al eje y de 2 y radio del círculo de 0 por lo cual no la podemos graficar.
La de nivel 0 sería $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - 1 = 0$ que es equivalente a $z^2 + (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1$. La superficie resultante es un toroide con distancia del centro del circulo al eje y de 2 y radio del círculo de 1

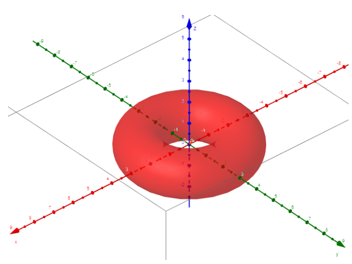


Figura 9: $z^2 + (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1$

Y por último la de nivel 1 sería $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - 1 = 1$ que es equivalente a $z^2 + (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 2$. La superficie resultante es un toroide con distancia del centro del circulo al eje y de 2 y radio del círculo de $\sqrt{2}$
Para las trazas de las superficies con planos paralelos a los coordenados debemos considerar las siguientes ecuaciones:

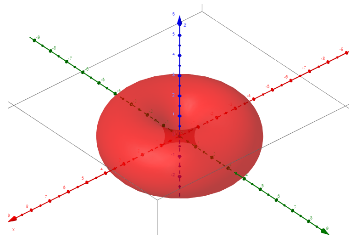
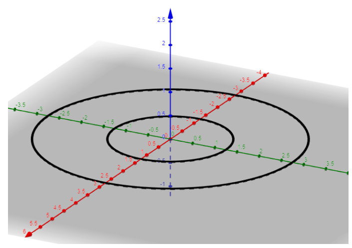


Figura 10: $z^2 + (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 2$

Para planos paralelos al XY las trazas generadas por la curva de nivel serán curvas de la forma $r^2 + (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = c + 1$



Que como podemos ver son dos círculos concéntricos, en los cuales varían los radios según la r que escojamos.
Para planos paralelos al XZ las trazas generadas por la curva de nivel serán curvas de la forma $z^2 + (2 - \sqrt{x^2 + r^2})^2 = c + 1$

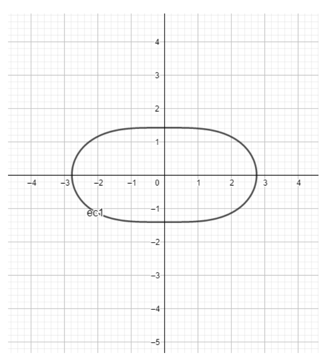


Figura 11: $r = 2$

Por último para los planos paralelos al YZ las trazas son de la forma $z^2 + (2 - \sqrt{r^2 + y^2})^2 = c + 1$

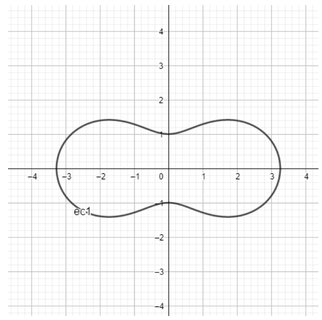


Figura 12: $r = 1$

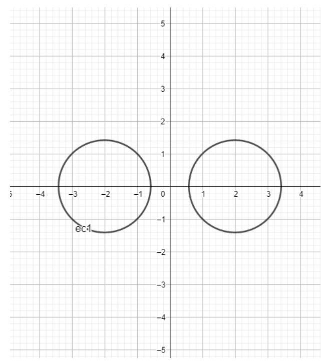


Figura 13: $r = 0$

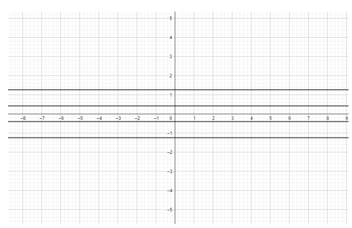


Figura 14: $r = 0{,}5$

Problema 15

Dibuja la curva determinada por la parametrización $\alpha(t) = (\cos\ t, \text{sen}\ t, 1-\text{sen}\ t)$. **Determina la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y la forma cartesiana del plano en el que se encuentra dicha curva.**

De la ecuación ya parametrizada $\alpha(t) = (\cos\ t, \text{sen}\ t, 1 - \text{sen}\ t)$ sabemos que
$x = \cos\ t$, $y = \text{sen}\ t$ y $z = 1 - \text{sen}\ t$
y también sabemos que $\text{sen}^2\ t + \cos^2\ t = 1$ por lo tanto $x^2 + y^2 = 0$.

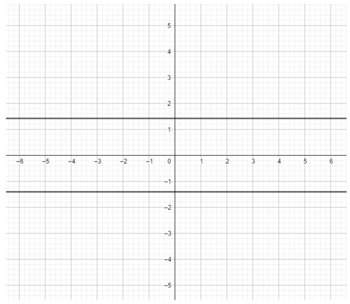


Figura 15: $r = 1{,}5$

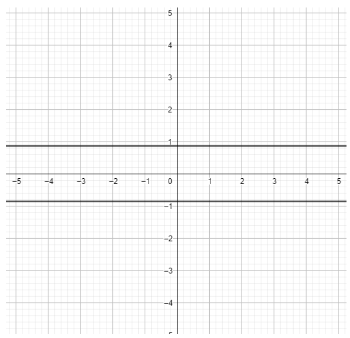


Figura 16: $r = 3$

Otra ecuación que nos da la parametrización es $z = 1 - y$ ya que $z = 1 - \text{sen }\ t$ y $y = \text{sen }\ t$

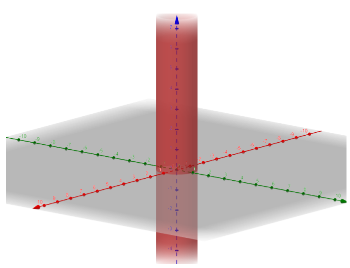


Figura 17: $x^2 + y^2 = 0$

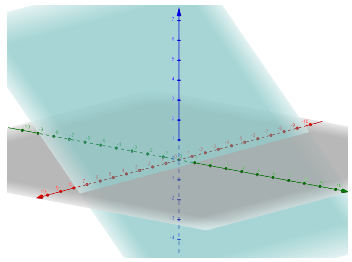


Figura 18: $z = 1 - y$

Al intersectar ambas figuras, obtendremos la curva parametrizada por $\alpha(t)$

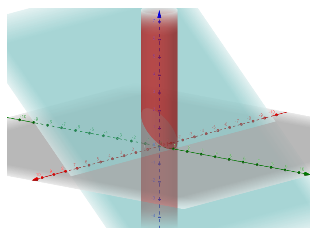


Figura 19: $x^2 + y^2 = 0$ y $z = 1 - y$

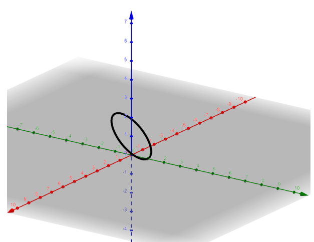


Figura 20: $\alpha(t) = (cos\ t, sen\ t, 1 - sen\ t)$

Ahora hay que encontrar el plano en el que se encuentra la curva. Como la curva es generada por la intersección de un cilindro y un plano ($\pi := z = 1 - y$) entonces $\forall \vec{x} \in \alpha(t)$ se tiene que $\vec{x} \in \pi$.
Por lo tanto la ecuación cartesiana del plano que contiene a $\alpha(t)$ es

$$y + z - 1 = 0$$

Si ponemos a x y a z como parámetros obtenemos otra ecuación. Si $x = \lambda$ y

$z = \mu$ entonces $y = 1 - \mu$. Así la ecuación paramétrica del plano es

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \mu \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = \mu \end{cases}$$

De aquí podemos sacar rápidamente la ecuación vectorial, ya que tenemos información del punto y de los vectores directores en la ecuación anterior. El punto que está en el plano es $P = (0, 1, 0)$ y los vectores directores $\vec{v} = (1, 0, 0)$ y $\vec{u} = (0, -1, 1)$ entonces la ecuación vectorial del plano es

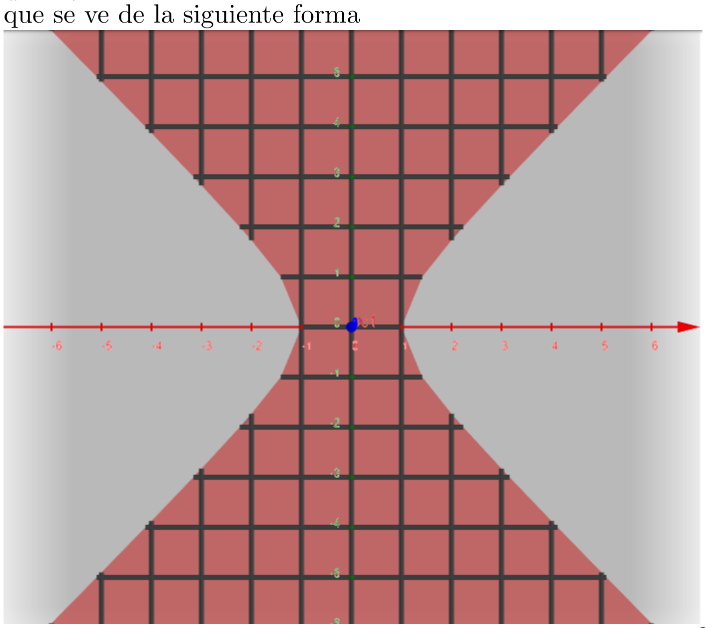
$$(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, -1, 1)$$

Problema 16

Determina el dominio y dibuje la gráfica de la función dada por:

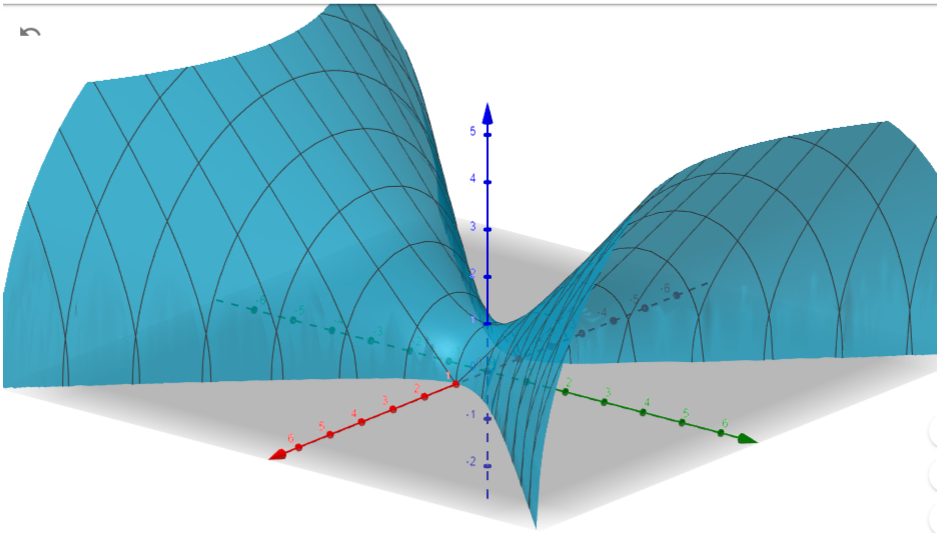
$$f(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \tag{1}$$

El valor dentro de la raíz debe ser mayor o igual a cero.
$\frac{x2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ recordemos que esta es la ecuación de la hipérbola en el plano R^2 que se ve de la siguiente forma



El dominio de la función es el conjunto $\{(x, y) \in R^2 \colon \frac{x2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.
Podemos hacer $f(x, y) = z$ para despejar la ecuación y sea más fácil visualizar el resultado. Resulta:
$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Hacemos las trazas xy y yz. Si $z = 0$ obtenemos la misma

hipérbola en xy. Si $x = 0$ queda la hipérbola en yz; y en $y = 0$ queda una elipse en el plano xz. Podemos tomar diferentes valores para a,b y c.



La gráfica final aparece de esta manera para $a = b = c = 1$:

Problema 17

Demuestre si existe o no el límite en el punto indicado.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   Dem: p.d. $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ entonces $|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0| < \epsilon$.
   claramente $0 < x^2 \leq x^2 + y^2$
   ent. $x^2 \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2}}$
   $= \frac{|x^2|}{|x|} = \frac{|x|^2}{|x|} = |x|$

   Como $|x| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, hacemos $\delta = \epsilon$, entonces $|x| < \epsilon$
   $|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0| = |\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = |x| < \epsilon$

Problema 18

Demuestra mediante la definición $(\epsilon - \delta)$ **que las siguientes son funciones continuas en** $(0,0)$

$$\text{a) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) p.d. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que
$||(x,y) - 0|| < \delta \implies ||f(x,y) - f(0,0)|| < \epsilon$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dem: Notemos que

$$\left|\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \left|\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x^2+(-y^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x^2|+|(-y^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Haciendo $\delta = \epsilon$,
$||(x,y) - 0|| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \implies ||f(x,y) - f(0,0)|| = \left|\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \epsilon$

b) p.d. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que
$||(x,y) - 0|| < \delta \implies ||f(x,y) - f(0,0)|| < \epsilon$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dem: Notemos que

$$\left|\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^4-y^4+2x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^4+(-y^4)+2x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^4+2x^2y^2|+|-y^4|}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{|x^4+2x^2y^2|+y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^4|+|2x^2y^2|+y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

Como $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, entonces $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} < \delta\sqrt{x^2+y^2} < \delta^2$, y así $x^2+y^2 < \delta^2$. Si hacemos $\delta = \sqrt{\epsilon}$, entonces

$$||f(x,y) - f(0,0)|| = \left|\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} - 0\right| < x^2+y^2 < \delta^2 = \epsilon$$